Sintaxis abstracta

Tipos

$$\begin{array}{rcll} \tau & ::= & \mathsf{Bool} & \text{booleanos} \\ & \mid & \mathsf{Nat} & \text{números naturales} \\ & \mid & \tau_1 \to \tau_2 & \text{funciones} \end{array}$$

Términos

$$\begin{array}{rcll} M & ::= & x & \text{variable} \\ & \mid & \lambda x : \sigma .\ M & \text{función anónima} \\ & \mid & M_1 M_2 & \text{aplicación} \\ & \mid & \mathsf{True} & \text{verdadero} \\ & \mid & \mathsf{False} & \text{falso} \\ & \mid & \mathsf{if}\ M_1\ \mathsf{then}\ M_2\ \mathsf{else}\ M_3 & \text{condicional} \\ & \mid & 0 & \text{cero} \\ & \mid & \mathsf{Succ}(M) & \text{sucesor de } M \\ & \mid & \mathsf{IsZero}(M) & \text{¿es } M \text{ igual a } 0\text{?} \\ & \mid & \mathsf{Pred}(M) & \text{predecesor de } M \end{array}$$

Contextos de tipado

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & ::= & \varnothing \\ & \mid & \Gamma, x : \tau \end{array}$$

Reglas de asignación de tipos

$$\frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x : \tau}\ \textsc{t-var} \qquad \frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau .\ M : \tau \to \sigma}\ \textsc{t-lam}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma \qquad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash M\, N : \sigma}\ \textsc{t-app}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{True} : \mathsf{Bool}}\ \textsc{t-true} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{False} : \mathsf{Bool}}\ \textsc{t-false}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Bool} \qquad \Gamma \vdash N_1 : \tau \qquad \Gamma \vdash N_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 : \tau}\ \textsc{t-if}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash 0 : \mathsf{Nat}}\ \textsc{t-zero} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{Succ}(M) : \mathsf{Nat}}\ \textsc{t-succ}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{IsZero}(M) : \mathsf{Bool}}\ \textsc{t-isZero} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{Pred}(M) : \mathsf{Nat}}\ \textsc{t-pred}$$

Algoritmo de inferencia de tipos

$$\frac{?k \text{ es una variable de tipos fresca}}{x \ \rightsquigarrow\ x : ?k \vdash x : ?k}\ \textsc{i-var}$$

$$\frac{\begin{array}{c} M \ \rightsquigarrow\ \Gamma_1 \vdash M' : \tau \qquad N \ \rightsquigarrow\ \Gamma_2 \vdash N' : \sigma \qquad ?k \text{ es una variable de tipos fresca} \\ \mathbb{S} = \mathsf{mgu}\{\tau \overset{?}{=} \sigma \to ?k\} \cup \{\Gamma_1(x) \overset{?}{=} \Gamma_2(x) : x \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2\} \end{array}}{M\, N \ \rightsquigarrow\ \mathbb{S}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash M'\, N' : ?k)}\ \textsc{i-app}$$

$$\frac{M \ \rightsquigarrow\ \Gamma \vdash M' : \tau \qquad \sigma = \begin{cases} \Gamma(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ \text{una variable fresca } ?k & \text{si no} \end{cases}}{\lambda x.\, M \ \rightsquigarrow\ \Gamma \setminus \{x\} \vdash \lambda x : \sigma.\ M' : \sigma \to \tau}\ \textsc{i-lam}$$

$$\frac{}{\mathsf{True} \ \rightsquigarrow\ \emptyset \vdash \mathsf{True} : \mathsf{Bool}}\ \textsc{i-true}$$

$$\frac{}{\mathsf{False} \ \rightsquigarrow\ \emptyset \vdash \mathsf{False} : \mathsf{Bool}}\ \textsc{i-false}$$

$$\frac{\begin{array}{c} M \ \rightsquigarrow\ \Gamma_0 \vdash M' : \tau \qquad N_1 \ \rightsquigarrow\ \Gamma_1 \vdash N_1' : \sigma_1 \qquad N_2 \ \rightsquigarrow\ \Gamma_2 \vdash N_2' : \sigma_2 \\ \mathbb{S} = \mathsf{mgu}\{\tau \overset{?}{=} \mathsf{Bool}, \sigma_1 \overset{?}{=} \sigma_2\} \cup \{\Gamma_i(x) \overset{?}{=} \Gamma_j(x) : i, j \in \{0,1,2\},\ x \in \Gamma_i \cap \Gamma_j\} \end{array}}{\mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \ \rightsquigarrow\ \mathbb{S}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \mathsf{if}\ M'\ \mathsf{then}\ N_1'\ \mathsf{else}\ N_2' : \sigma_1)}\ \textsc{i-if}$$

$$\frac{}{0 \ \rightsquigarrow\ \emptyset \vdash 0 : \mathsf{Nat}}\ \textsc{i-zero}$$

$$\frac{M \ \rightsquigarrow\ \Gamma \vdash M' : \tau \qquad \mathbb{S} = \mathsf{mgu}\{\tau \overset{?}{=} \mathsf{Nat}\}}{\mathsf{Succ}(M) \ \rightsquigarrow\ \mathbb{S}(\Gamma \vdash \mathsf{Succ}(M') : \mathsf{Nat})}\ \textsc{i-succ}$$

$$\frac{M \ \rightsquigarrow\ \Gamma \vdash M' : \tau \qquad \mathbb{S} = \mathsf{mgu}\{\tau \overset{?}{=} \mathsf{Nat}\}}{\mathsf{IsZero}(M) \ \rightsquigarrow\ \mathbb{S}(\Gamma \vdash \mathsf{IsZero}(M') : \mathsf{Bool})}\ \textsc{i-isZero}$$

$$\frac{M \ \rightsquigarrow\ \Gamma \vdash M' : \tau \qquad \mathbb{S} = \mathsf{mgu}\{\tau \overset{?}{=} \mathsf{Nat}\}}{\mathsf{Pred}(M) \ \rightsquigarrow\ \mathbb{S}(\Gamma \vdash \mathsf{Pred}(M') : \mathsf{Nat})}\ \textsc{i-pred}$$